

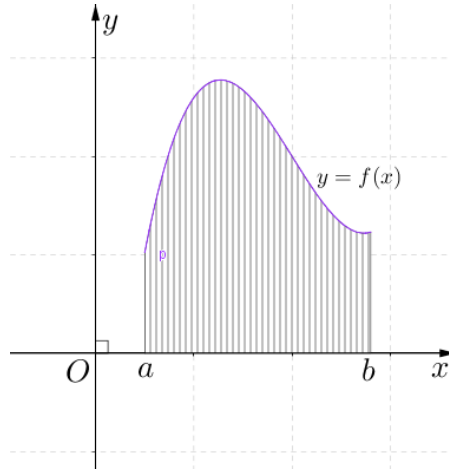
GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3

§2. TÍCH PHÂN

I. DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

1. Định nghĩa

➤ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là hình thang cong.



➤ Diện tích hình thang cong:

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Bằng cách chia nhỏ phần hình phẳng cần tính diện tích ra thành các hình chữ nhật, người ta chứng minh được diện tích của hình thang cong cần tìm là $F(b) - F(a)$.

II. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay gọi là tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$ của hàm số $f(x)$). Kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Tên gọi:

➤ $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên.

➤ $f(x) dx$ gọi là biểu thức dưới dấu tích phân.

➤ $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

3. Chú ý:

➤ Nếu $a = b$ thì $\int_a^a f(x) dx = 0$.

➤ Nếu $a > b$ thì $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

➤ Tích phân không phụ thuộc vào biến số: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$.

➤ Ý nghĩa hình học của tích phân: $S = \int_a^b f(x) dx$.

Với S là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y = f(x)$ trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($f(x)$ là hàm số liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a; b]$).

III. TÍNH CHẤT

1. Tính chất 1: $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (với k là hằng số).

2. Tính chất 2: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

3. Tính chất 3: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (với $a < c < b$).

4. Ví dụ

➤ **VD1:** Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } I = \int_1^2 \left(x^3 - \frac{3}{x} + e^x \right) dx; \quad \text{b) } J = \int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int_1^2 \left(x^3 - \frac{3}{x} + e^x \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\ln|x| + e^x \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - 3\ln 2 + e^2 \right) - \left(\frac{1^4}{4} - 3\ln 1 + e^1 \right) = \frac{15}{4} - 3\ln 2 + e^2 - e. \end{aligned}$$

$$\text{b) } J = \int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx = \int_1^4 x^2 dx + 3 \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^4 + 3 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3 - 1}{3} + 2(2^3 - 1) = 35.$$

➤ **VD2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1) = 12$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Tính giá trị của $f(4)$.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^4 = f(4) - f(1)$. Mà $f(4) - 12 = 17 \Rightarrow f(4) = 29$.

➤ **VD3:** Cho $\int_1^2 f(x) dx = -3$, $\int_2^5 f(x) dx = 5$ và $\int_1^5 g(x) dx = 6$.

Tính tích phân $I = \int_1^5 [2f(x) - 3g(x)] dx$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 f(x) dx = -3$ và $\int_2^5 f(x) dx = 5$ nên $\int_1^5 f(x) dx = 2$.

$$\Rightarrow I = \int_1^5 [2f(x) - 3g(x)] dx = 2 \int_1^5 f(x) dx - 3 \int_1^5 g(x) dx = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = -14.$$

➤ **VD4:** Tính tích phân $I = \int_0^2 |x-1| dx$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= \left(x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_1^3 f(x) dx = 6$.

Tính $I = \int_0^3 f(x) dx$.

A. $I = 8$.

B. $I = 12$.

C. $I = 36$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 6 = 8.$$

Câu 2: [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $f(1) = 2$ và

$f(3) = 9$. Tính $I = \int_1^3 f'(x) dx$.

A. $I = 11$.

B. $I = 7$.

C. $I = 2$.

D. $I = 18$.

Lời giải

Chọn B

$$I = f(x) \Big|_1^3 = f(3) - f(1) = 9 - 2 = 7.$$

Câu 3: [Mức độ 2] Đặt $I = \int_1^2 (2mx+1) dx$ (m là tham số thực). Tìm m để $I = 4$.

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 (2mx+1) dx = \left(mx^2 + x \right) \Big|_1^2 = (4m+2) - (m+1) = 3m+1.$$

$$\text{Do } I = 4 \Leftrightarrow 3m+1 = 4 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 4: [Mức độ 3] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1+\sin 2x) dx = \pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) + 1$, với a, b là các số nguyên dương.

Tính $a+2b$.

A. 10.

B. 14.

C. 12.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1+\sin 2x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1 = \pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \right) + 1.$$

$$\Rightarrow a=8; b=2 \Rightarrow a+2b=12.$$

Câu 5: [Mức độ 2] Biết tích phân $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Giá trị của a bằng

A. 7.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = \int_0^1 \left(-2 + \frac{7}{2-x} \right) dx = \left(-2x - 7 \ln |2-x| \right) \Big|_0^1 = 7 \ln 2 - 2 \Rightarrow a=7.$$

Câu 6: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và

$f(0)=1; f(1)=-2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $2+\ln 15$.

B. $3-\ln 15$.

C. $\ln 15 - 1$.

D. $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \ln |2x-1| + C.$$

$$= \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(1)=-2 \Rightarrow C_1=-2; f(0)=1 \Rightarrow C_2=1.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) - 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } f(-1) = \ln 3 + 1; f(3) = \ln 5 - 2 \Rightarrow f(-1) + f(3) = \ln 15 - 1.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 7: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 10$. Khi đó $\int_1^2 g(x) dx$ bằng

A. 17.

B. 1.

C. -1.

D. -4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow 3 \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 10.$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 3 - \int_1^2 g(x) dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx = -1.$$

Câu 8: Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^a f(x) dx = 1.$

B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

C. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, c \in (a; b).$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Câu 9: Giá trị của $\int_{-1}^0 e^{x+1} dx$ bằng

A. $1 - e.$

B. $e - 1.$

C. $-e.$

D. $e.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_{-1}^0 e^{x+1} dx = e^{x+1} \Big|_{-1}^0 = e - 1.$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 3]$, $f(3) = 5$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. -1.

B. 11.

C. 1.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_1^3 f'(x) dx = 6 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^3 = f(3) - f(1) = 5 - f(1) = 6 \Leftrightarrow f(1) = -1.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 11: Tìm số thực $a < 0$ thỏa mãn $\int_1^a (x^3 - 6x) dx = \frac{875}{4}.$

A. $a = -4.$

B. $a = -5.$

C. $a = -6.$

D. $a = -3.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^a (x^3 - 6x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2 \right) \Big|_1^a = \frac{a^4}{4} - 3a^2 + \frac{11}{4}.$$

Từ giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{a^4}{4} - 3a^2 + \frac{11}{4} = \frac{875}{4} \Leftrightarrow a^4 - 12a^2 - 864 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 36 \\ a^2 = -24 \end{cases}.$$

Do $a < 0$ nên $a = -6$.

Câu 12: Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 2)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(0; 4)$.

D. $(-3; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m \in (0; 4)$.

Câu 13: Cho $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = (2x - \ln|x+1| - 2\ln|x+2|) \Big|_0^1 = 2 + \ln 2 - 2\ln 3.$$

Vậy $a + b + c = 1$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 4$. Tính

$$\int_{-1}^3 f(|x|) dx.$$

A. 6.

B. 4.

C. 8.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì } f(|x|) \text{ là hàm chẵn nên } \int_{-1}^3 f(|x|) dx = 2 \int_0^1 f(|x|) dx + \int_1^3 f(|x|) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4.$$

Ta có $\int_{-1}^3 f(|x|)dx = \int_{-1}^1 f(|x|)dx + \int_1^3 f(|x|)dx = 2\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 4 + 4 = 8.$

Câu 15: Biết $\int_0^2 [f(x) + x]dx = 6$ và $\int_0^2 [3f(x) - g(x)]dx = 10$. Tính $I = \int_0^2 [2f(x) + 3g(x)]dx$.

A. $I = 12.$

B. $I = 16.$

C. $I = 10.$

D. $I = 14.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^2 [f(x) + x]dx = 6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 = 6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4.$

$\int_0^2 [3f(x) - g(x)]dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 3f(x)dx - \int_0^2 g(x)dx = 10 \Rightarrow \int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 3f(x)dx - 10 = 2.$

$I = \int_0^2 [2f(x) + 3g(x)]dx = 2.4 + 3.2 = 14.$

Vậy $I = 14.$

Câu 16: Biết rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\sin x + 7\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx = a + 2\ln \frac{b}{c}$ với $a > 0; b, c \in \mathbb{N}^*; \frac{b}{c}$ tối giản. Hãy tính giá trị biểu thức $P = a - b + c$.

A. $\pi - 1.$

B. $\frac{\pi}{2} + 1.$

C. $\frac{\pi}{2} - 1.$

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Xét đồng nhất thức: $-4\sin x + 7\cos x = A(2\sin x + 3\cos x) + B(2\cos x - 3\sin x)$

$= (2A - 3B)\sin x + (3A + 2B)\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2A - 3B = -4 \\ 3A + 2B = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}.$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\sin x + 7\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x} \right) dx = \left(x + 2\ln |2\sin x + 3\cos x| \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2} + 2\ln \frac{2}{3}.$

$\Rightarrow a = \frac{\pi}{2}, b = 2, c = 3.$

Vậy $P = a - b + c = \frac{\pi}{2} - 2 + 3 = \frac{\pi}{2} + 1.$

-----Hết-----